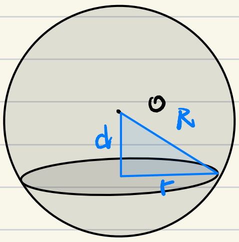
外接球

正方体、长方体问题.

四个不共面的点确定一个球面



$R^2=d^2+r^2$

斜棱柱没有外接球

外接圆半径

① 等边△. $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

② 等腰△. 作三线合一.

③ 直角△ $r=\frac{斜边}{2}$

④ $r=\frac{对角线}{2}$

⑤ 正六边形 $r=a$.

⑥ a a a 2a $r=a$.

考法一: 正方体外接球

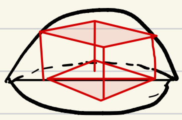
考法二: 球与所有棱都相切

$2R=\sqrt{2}a$

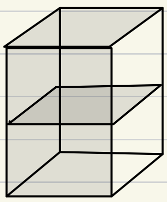
考法三: 内切球

$R_内=\frac{a}{2}$.

考法四: 半球



⇒ 补成整个球

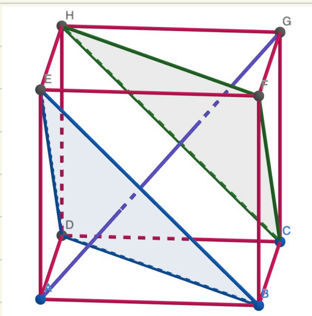


$2R=\sqrt{a^2+a^2+4a^2}$

① $PA=PB=PC$ ⇒ P在底面投影为外心

② P到AB.BC.AC距离相等 ⇒ P在底面投影为内心.

③ PA.PB.PC两两垂直，则P在△ABC投影为垂心



AG⊥面HFC

AG⊥面EDB.

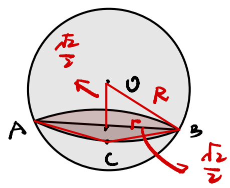
面HFC、面EDB把AC三等分

第 12 讲：立体几何外接球内切球问题

题型一：外接球基本概念

1.(2021 年高考全国甲卷理科)已如 A,B,C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC\perp BC,AC=BC=1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为　(A)

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

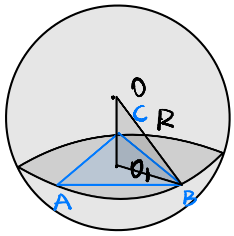


2.(2020 年高考数学课标Ⅰ卷理科)已知 A,B,C 为球 O 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，若 $\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为　(A)

$\pi r^2=4\pi \Rightarrow r=2$

$S=4\pi R^2$

A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π



$r=2=\frac{\sqrt{3}}{3}OO_1$

$OO_1=2\sqrt{3}$

$R=4.$

$S=64\pi$

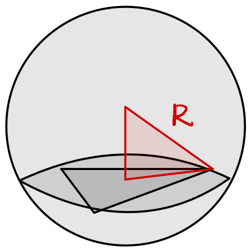
3. (2020 年高考数学课标 II 卷理科)已知△ABC 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 O 的球面上．若球 O 的表面积为 16π，则 O 到平面 ABC 的距离为　(C)

A．$\sqrt{3}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$4\pi R^2=16\pi$

$\Downarrow$

$R=2$



$OO_1=1.$

$S_{\text{等边}}=\frac{9}{4}\sqrt{3}\Rightarrow a=3.$

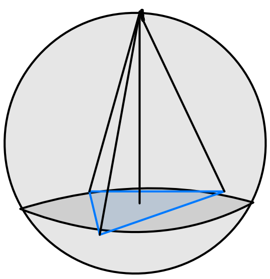
$r=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}.$

4. (2018 年高考数学课标Ⅲ卷（理）)设 A,B,C,D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 (B)

$R=4$

A．$12\sqrt{3}$　　B．$18\sqrt{3}$　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$54\sqrt{3}$

D



$r=2\sqrt{3}$

$OO_1=2.$

$V=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times(4+2)=18\sqrt{3}$

题型二：正方体、长方体问题

$R=2.$ $4=\sqrt{3}a \Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

5.已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$，那么正方体的棱长是 D

A. $2\sqrt{2}$ *B.* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ *C.* $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ *D.* $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

体对角线 = 球の直径

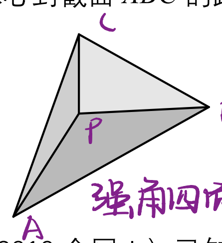
$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$2R=\sqrt{3}a.$（正方体）

6.(2017 年高考数学课标Ⅲ卷理科)已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为 （ ）

A．π B．$\frac{3\pi}{4}$ C．$\frac{\pi}{2}$ D．$\frac{\pi}{4}$

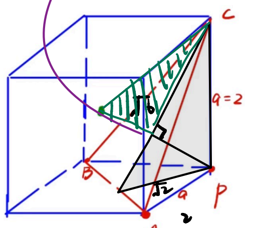
7.若正三棱锥 $P-ABC$，点 P,A,B,C 都在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上，若 PA,PB,PC 两两相互垂直，则球心到截面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



补体

墙角四面体

内心



$2R=2\sqrt{3}=\sqrt{3}a.$

$\Rightarrow a=2.$

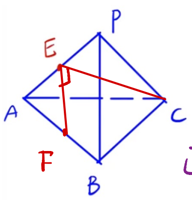
$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{x}$

$x=\frac{2\times2\sqrt{3}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

8.（2019 全国Ⅰ）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为（ ）

A．$8\sqrt{6}\pi$ B．$4\sqrt{6}\pi$ C．$2\sqrt{6}\pi$ D．$\sqrt{6}\pi$



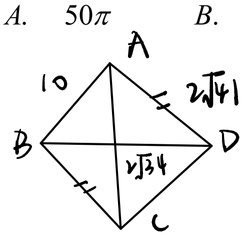
$EF // PB \Rightarrow PB \perp EC$

$PB \perp AC$

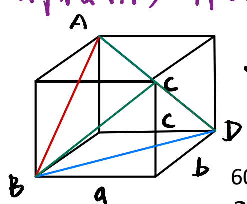
正三棱锥对棱垂直

9.四面体 $A-BCD$ 中，$AB=CD=10$，$AC=BD=2\sqrt{34}$，$AD=BC=2\sqrt{41}$，则四面体 $A-BCD$ 外接球的表面积为 C

A. 50π *B.* 100π *C.* 200π *D.* 300π



对棱相等，补长方体



$\begin{cases} a^2+b^2=136 \\ a^2+c^2=164 \\ b^2+c^2=100. \end{cases}$

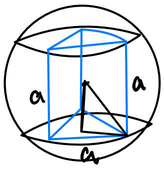
$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{200}$

$R=5\sqrt{2}$

$S=4\pi R^2=200\pi$

题型三：柱

10.设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 a，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为___________.



上下面全等，北纬=南纬

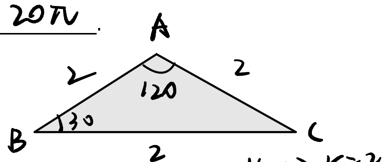
$R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2$

$=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{3}=\frac{7}{12}a^2$

11.直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB=AC=AA_1=2,\angle BAC=120°$，则此球的表面积等于 $\underline{20\pi}$.

$\boxed{R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2}$

$=1+4=5$



$2r=\frac{2}{\sin 30°}=4\Rightarrow r=2$

12.一个六棱柱的底面是正六边形，其侧棱垂直底面.已知该六棱柱的顶点都在同一球面上，六棱柱的体积为 $\frac{9}{8}$，底面周长为 3，那么这个球的体积为 $\underline{\frac{4}{3}\pi}$.

$6a=3\Rightarrow a=\frac{1}{2}=r.$

$V=S_{底}\cdot h=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot h=\frac{9}{8}.$

$h=\sqrt{3}$

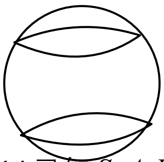
$R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

$V=\frac{4}{3}\pi.$

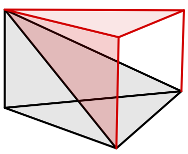
13.（2017 全国 III 文）已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$



14.已知 S,A,B,C 是球 O 表面上的点，$SA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则球 O 的表面积等于

A. 4π　　B. 3π　　C. 2π　　D. π

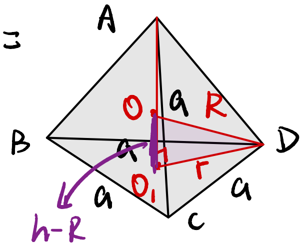


对于侧棱⊥底面的锥也成立.

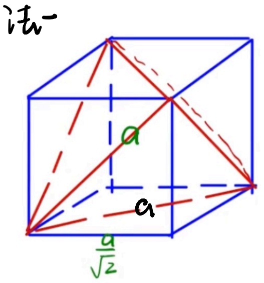
题型四：正棱锥

15.已知三棱锥 $A-BCD$ 所有棱长都为 $\sqrt{2}$，则该三棱锥外接球的体积是__________.

法二

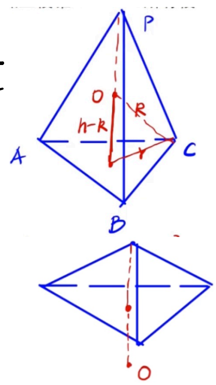


法一



$2R=\sqrt{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}$

$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a.$



都适用

$\boxed{(h-R)^2+r^2=R^2}$

16.（2014 大纲）正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为

$A.\ \dfrac{81\pi}{4}$　　$B.\ 16\pi$　　$C.\ 9\pi$　　$D.\ \dfrac{27\pi}{4}$

17.一个正三棱锥的4个顶点都在半径为1的球面上，其中底面的3个顶点在该球的一个大圆上，则该正三棱锥的体积是

球的大円，
赤道面

$A.\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　$B.\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$C.\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　$D.\ \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

18. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$是边长为1的正方体，$S-ABCD$是高为1的正四棱锥，若点S,A_1,B_1,C_1,D_1在同一个球面上，则该球的表面积为（　）

A．$\dfrac{9}{16}\pi$　　B．$\dfrac{25}{16}\pi$　　C．$\dfrac{49}{16}\pi$　　D．$\dfrac{81}{16}\pi$

题型五：找球心的万能分析法

19.（2012 全国新课标理）已知三棱锥$S-ABC$的所有顶点都在球O的球面上，ΔABC是边长为1的正三角形，SC为球O的直径，且$SC=2$，则此棱锥的体积为

$A.\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　$B.\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　$C.\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　$D.\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20.已知三棱锥$A-BCD$，ΔABC和ΔBCD都是边长为2的等边三角形，且面$ABC\perp$面BCD，则三棱锥$A-BCD$的外接球表面积为___________.

21.四面体 $PABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，$PA=8$，$BC=4$，$PB=PC=AB=AC$，且平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，则球 O 的表面积为

A．64π　　B．65π　　C. 66π　　D．128π

题型六：内切球　与所有表面都相切

长方体不一定有内切球

任意四面体有唯一内切球

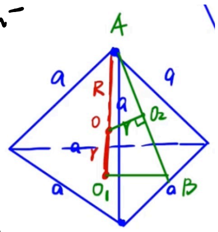
22.已知三棱锥 $A-BCD$ 所有棱长都为 $\sqrt{2}$，则该三棱锥内接球的体积是________.

$\frac{R}{r}=\frac{3}{1}$

外接球，内切球 球心相同

正四面体 $\frac{R}{r}=\frac{3}{1}$　$r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

法一



$\triangle OO_2A \backsim \triangle BO_1A$

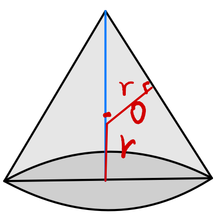
$\frac{AO}{AB}=\frac{OO_2}{O_1B}$

$\frac{h-r}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{r}{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

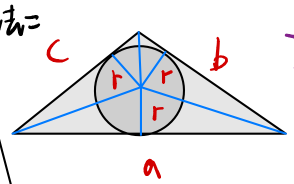
$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

$r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

23. (2020 年高考数学课标 III 卷理科)已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为________．



法二



等面积法

$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=S_\triangle$

$V_{O-ABC}+V_{O-ACD}+V_{O-ABD}+V_{O-BCD}=V_{总}$

$$\boxed{r_i=\frac{3V}{S_A+S_B+S_C+S_D}}$$

ABCD四个面面积

24.(2016 高考数学课标 III 卷理科)在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是　(　　)

A．4π　　B．$\frac{9\pi}{2}$　　C．6π　　D．$\frac{32\pi}{3}$